

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 1° ottobre 1905.

Matematica. — Sulle distorsioni generate da tagli uniformi.

Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. In una Nota precedente ⁽¹⁾, dopo aver messo a confronto (§ 1) le condizioni essenzialmente diverse che si presentano nei due casi in cui in un cilindro cavo si faccia una distorsione dovuta ad un taglio radiale (distorsione d'ordine 6 ⁽²⁾) oppure ad un taglio uniforme (distorsione d'ordine 1), ho approfondito il primo caso ed ho mostrato che il corpo, dopo la distorsione, non conserva la forma cilindrica, giacchè l'orlo interno delle due basi si rigonfia sollevandosi, si contrae invece l'orlo esterno e si forma un restringimento nella parte media del cilindro (vedi le figure 6, 7, 8, 9 della Nota precedente). Ancora più sensibili e più singolari sono le deformazioni che si hanno nel caso del taglio uniforme, giacchè il corpo cessa dall'essere simmetrico dopo la distorsione.

Mi permetto nella presente Nota di sviluppare questo caso, sebbene i calcoli siano alquanto complicati, ma anche in questo, come nel precedente, i risultati preveduti dal calcolo sono così bene confermati dall'esperienza che il caso stesso costituisce un esempio istruttivo nella scienza dell'elasticità, tanto più che la sola intuizione, senza essere guidata dal calcolo, o dalle esperienze, non avrebbe potuto condurre a prevedere, nemmeno in modo

⁽¹⁾ Seduta del 18 giugno 1905.

⁽²⁾ *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Seduta del 2 aprile 1905.

grossolano e qualitativo, quale deformazione viene indotta nel corpo dalla distorsione.

Si giunge così ad un risultato molto curioso ed è che preso un anello simmetrico avente la forma di un cilindro cavo è impossibile restringerlo conservandogli la forma cilindrica col togliere una fetta e col risaldare poscia le due faccie del taglio, perchè, se si fa un taglio radiale il corpo viene ad assumere la forma indicata nella figura 6 della Nota precedente, se il taglio

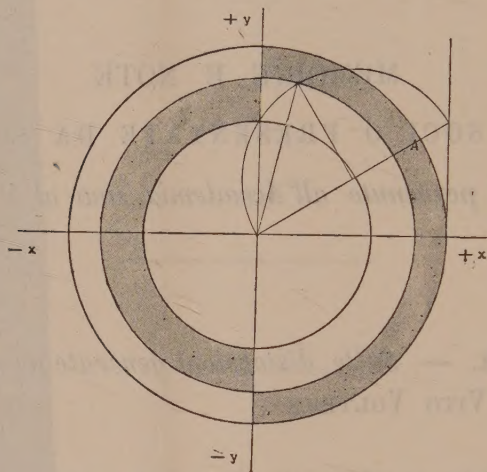


FIG. 1.

è uniforme il corpo cessa dall'essere simmetrico e prende la forma indicata nella fig. 6 di questa Nota.

Mediante un taglio che possa considerarsi come risultante di un taglio o di una zeppa radiale e di un taglio o di una zeppa a faccie parallele si giunge sempre ad uno stato di deformazione in cui la simmetria rispetto all'asse è perduta.

In pratica i fabbri, se debbono restringere un tubo, asportandone una fetta, sogliono fare dapprima un taglio radiale poi, prima di riaccostare le faccie del taglio ne limano la parte interna in modo da poterle far combaciare col minimo sforzo possibile ⁽¹⁾ e poi saldano. In tal modo però, il taglio non essendo più radiale, il tubo non conserva la forma d'un solido di rivoluzione.

⁽¹⁾ Per formarsi un'idea della grandezza di queste azioni supponiamo che il nostro cilindro cavo sia un anello di acciaio simmetrico a sezione rettangolare il cui diametro medio sia di 5^m. e lo spessore di 1^m. Applichiamo la formola (III) della Nota precedente prendendo $E = 19549$ (Cg per mmq. Wertheim) $\eta = 0,3$, $q = 2,5$, $s = 1$ e assu-

2. Riprendiamo la fig. 2 della Nota precedente e cerchiamo le formule relative alla fessura uniforme.

Supponiamo che l'asse z sia l'asse di simmetria e che il taglio si sia eseguito lungo il piano x, z dalla parte delle x positive. Facendo nelle formule del § 2 dell'Art. III della 2^a Nota ⁽¹⁾ $l = n = p = q = r = 0$,

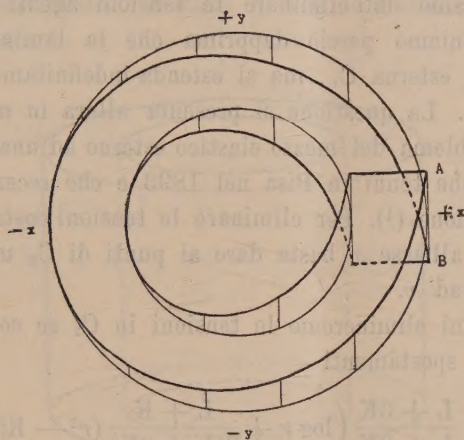


FIG. 2.

avremo

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\frac{1}{2} \frac{m}{2\pi} \log(x^2 + y^2) \\ v = \frac{m}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

le quali corrispondono al taglio uniforme di ampiezza m . Però il corpo sarà soggetto a tensioni superficiali che si equilibrano fra loro. (Vedi Art. I della 2^a Nota).

Denotiamo rispettivamente con R_2 e con R_1 i due raggi interno ed esterno del cilindro cavo che costituisce l'anello. Con un facile calcolo avremo le sei caratteristiche della deformazione e delle tensioni da cui si ricava che le tensioni saranno nulle sulle due basi, mentre quelle unitarie agenti sulle

miamo $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{360}$ (supponendo che l'ampiezza angolare della fessura radiale sia di 1°)

$\xi = 0,5$ onde calcolare la pressione nelle regioni adiacenti alla superficie esterna. Si otterrà $F = 10,7$ ossia la pressione o la tensione calcolate saranno di 10^{Cg},7 per mmq. e per ogni grado di ampiezza angolare della fessura radiale fatta nell'anello. Questi sforzi si hanno quando si suppongono le basi sollecitate dalle azioni che le mantengono piane ed alle distanze primitive. Calcolando tali azioni mediante le formole (II'') della Nota precedente si trova che esse raggiungono il valore di 3^{Cg},6 per mmq. agli orli delle basi.

(1) Seduta del 19 febbraio 1905.

superficie laterali resulteranno parallele all'asse x e rispettivamente eguali a $\frac{Km}{\pi R_1}$ sulla superficie esterna e a $-\frac{Km}{\pi R_2}$ sulla superficie interna.

Convieni ora eliminare queste tensioni laterali. A tal fine si può operare nel modo seguente. Si può prescindere dalla coordinata z e sostituire al corpo che si studia una lamina elastica limitata da due cerchi di raggi R_2 e R_1 . Cominciamo dall'eliminare le tensioni agenti sulla circonferenza interna C_2 . Supponiamo perciò dapprima che la lamina non sia limitata dalla circonferenza esterna C_1 , ma si estenda indefinitamente in tutti i sensi esternamente a C_2 . La questione si presenta allora in modo perfettamente analogo ad un problema del mezzo elastico esterno ad una sfera che ho risoluto in un corso che tenni in Pisa nel 1893 e che recentemente venne ripreso dal prof. Tedone ⁽¹⁾. Per eliminare le tensioni costanti che sollecitano C_2 parallelamente all'asse x basta dare ai punti di C_2 una traslazione conveniente parallela ad x .

In altri termini elimineremo le tensioni in C_2 se comporremo gli spostamenti (1) cogli spostamenti

$$(2) \quad \begin{cases} u' = \frac{m}{2\pi} \frac{L+3K}{L+2K} \left(\log r + \frac{L+K}{2(L+3K)} (r^2 - R_2^2) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right) \\ v' = \frac{m}{2\pi} \frac{L+K}{2(L+2K)} (r^2 - R_2^2) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

in cui $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed L e K denotano le solite costanti dell'elasticità (Vedi 1^a Nota, Art. 2^o, § 2).

Però in tal modo, componendo le tensioni precedentemente agenti su C_1 in virtù degli spostamenti (1), con quelle generate in C_1 dagli spostamenti (2) si trovano su C_1 le tensioni di componenti

$$\begin{cases} -\frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^3} \cos 2\vartheta \\ -\frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^3} \sin 2\vartheta \end{cases}$$

ove si è posto $\vartheta = \arctg \frac{y}{x}$, ossia con ϑ si rappresenta l'angolo che il raggio vettore forma coll'asse x .

Ora queste ultime tensioni possono eliminarsi sia mediante gli spostamenti

$$(3) \quad \begin{cases} u'' = \frac{2A}{4K(L+K)} \left\{ (3L+5K) y^2 + (L-K) x^2 \right\}, \\ v'' = -\frac{2A}{4K(L+K)} (L+3K) xy, \end{cases}$$

⁽¹⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XVII, 1903, pag. 253.

sia mediante gli spostamenti

$$(3') \quad \begin{cases} u''' = B \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}, \\ v''' = B \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

scegliendo convenientemente le costanti A e B, o mediante una combinazione lineare di ambedue.

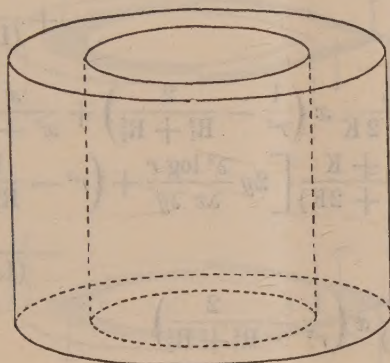


FIG. 3.

Ci si può ora giovare della arbitrarietà di questa combinazione lineare per far sì che gli spostamenti risultanti di (1), (2), (3), (3') generino tensioni nulle non solo su C_1 ma anche sul cerchio C_2 . In questa maniera si giunge finalmente alle formule

$$(I) \quad \begin{cases} U = \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} \left[(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2 \right] \right\} \\ V = \frac{m}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} - \right. \\ \quad \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}. \end{cases}$$

4. Le formule precedenti a cui si aggiunga l'altra

$$(I') \quad W = 0$$

ci danno le componenti degli spostamenti dovuti ad una distorsione generata da una fessura uniforme di ampiezza m nella ipotesi che le due

basi siano sollecitate da forze che le conservano piane ed alla loro primitiva distanza.

È facile calcolare le corrispondenti caratteristiche delle tensioni. Esse risultano

$$(4) \quad t_{11} = \frac{mK}{\pi} \left\{ \frac{L}{L+2K} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) + \frac{K}{L+2K} \frac{\partial \log r}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2x \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{L-K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} x \right\}$$

$$(5) \quad t_{22} = \frac{mK}{\pi} \left\{ \frac{L}{L+2K} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) + \frac{x}{x^2 + y^2} + \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2y \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x \partial y^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} x \right\}$$

$$(6) \quad t_{33} = \frac{mKL}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right)$$

$$(7) \quad t_{12} = \frac{mK}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \frac{\partial \log r}{\partial y} - \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2y \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2x \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + 2 \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{2(L+K)}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} y \right\}$$

$$(8) \quad t_{23} = t_{31} = 0.$$

Da queste formole si ricava

$$t_{11} x + t_{12} y = \frac{mK}{\pi} \frac{L+K}{L+2K} \frac{(r^2 - R_1^2)(r^2 - R_2^2)}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \\ t_{21} x + t_{22} y = \frac{mK}{\pi} \frac{L+K}{L+2K} \frac{(r^2 - R_1^2)(r^2 - R_2^2)}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}$$

quantità che si annullano per $r = R_1$, $r = R_2$, il che verifica l'annullarsi delle azioni esterne sulle superficie laterali del cilindro cavo.

Si ha poi come valore della dilatazione cubica

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{mK}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right).$$

Possiamo quindi stabilire la divisione della parte dilatata dalla parte compressa del corpo elastico.

Tracciamo perciò la linea

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$$

che è la circonferenza intermedia della fig. 1 compresa fra le due circonferenze estreme di raggi R_1 e R_2 . Tiriamo poi la linea $x = 0$ ossia l'asse delle y . Queste due linee divideranno la corona circolare in quattro regioni che abbiamo rispettivamente distinte in *chiaro* ed in *scuro*. Le regioni *chiaro* rappresenteranno le proiezioni sul piano xy delle parti *dilatate* del corpo elastico e le regioni *scure* rappresenteranno le proiezioni sullo stesso piano delle parti *comprese* del corpo.

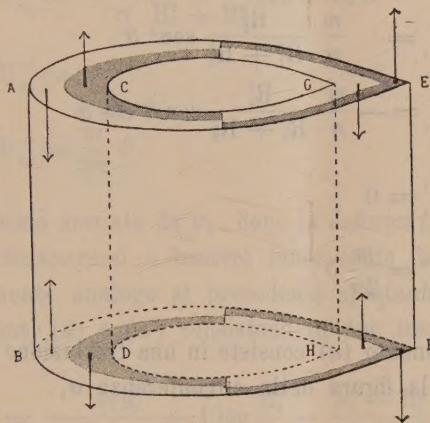


FIG. 4.

Nella figura è stata indicata la costruzione che deve farsi per ottenere la circonferenza intermedia. Essa è evidente, tanto che non ha bisogno di spiegazione.

5. Passiamo ora alla determinazione della forma assunta dal corpo elastico dopo la distorsione, sempre nella ipotesi che le due basi siano mantenute piane ed alla loro primitiva distanza.

Perciò basterà che vediamo come si deformano le basi stesse. Ora mediante le (I) possiamo calcolare i valori di U e V sulle due circonferenze σ_1 e σ_2 aventi rispettivamente i raggi R_1 e R_2 le quali formano il primitivo contorno delle due basi.

Denotando i valori stessi cogli indici σ_1 e σ_2 avremo

$$\left\{ \begin{aligned} U_{\sigma_1} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log R_1 + \frac{L+K}{L+2K} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \cos 2\vartheta \right\} \\ V_{\sigma_1} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \vartheta - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \sin 2\vartheta \right\} \\ U_{\sigma_2} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log R_2 + \frac{L+K}{L+2K} \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \cos 2\vartheta \right\} \\ V_{\sigma_2} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \vartheta - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \sin 2\vartheta \right\} \end{aligned} \right.$$

Gli spostamenti U_{σ_1} , V_{σ_1} si possono decomporre in tre spostamenti elementari (a), (b), (c) aventi rispettivamente per componenti

$$(a) \quad \begin{cases} U'_{\sigma_1} = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log R_1 - \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \\ V'_{\sigma_1} = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} U''_{\sigma_1} = \frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin^2 \vartheta \\ V''_{\sigma_1} = -\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} U'''_{\sigma_1} = 0 \\ V'''_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi} \vartheta. \end{cases}$$

Il primo spostamento (a) consiste in una traslazione parallela all'asse x la quale non altera la figura della circonferenza σ_1 .

Abbiamo poi

$$U''_{\sigma_1} \cos \vartheta + V''_{\sigma_1} \sin \vartheta = 0$$

$$U''_{\sigma_1} \sin \vartheta - V''_{\sigma_1} \cos \vartheta = \frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta.$$

Ciò prova che il secondo spostamento (b) muove ciascun punto della circonferenza tangenzialmente alla circonferenza stessa della quantità

$$\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta,$$

ossia con questo secondo spostamento i punti della circonferenza σ_1 si conservano sempre sopra di essa a meno di quantità del 2° ordine, trascurabili quindi.

Per il terzo spostamento (c) ciascun punto σ_1 si muove parallelamente all'asse y di una quantità proporzionale all'arco del cerchio σ_1 compreso fra l'origine degli archi e il punto stesso.

Vediamo dunque che, se si trascurano quantità del 2° ordine, la forma assunta dal cerchio σ_1 per la deformazione si otterrà senz'altro trascurando gli spostamenti (a) e (b) e tenendo conto del solo spostamento (c).

Una analoga decomposizione in tre spostamenti elementari (a'), (b'), (c') si può operare sopra gli spostamenti U_{σ_2} , V_{σ_2} , cioè essi si decompongono nei seguenti spostamenti elementari:

$$(a') \quad \left\{ \begin{array}{l} U'_{\sigma_2} = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log R_2 - \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \\ V'_{\sigma_2} = 0 \end{array} \right.$$

$$(b') \quad \left\{ \begin{array}{l} U''_{\sigma_2} = \frac{m}{\pi} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin^2 \vartheta \\ V''_{\sigma_2} = -\frac{m}{\pi} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \end{array} \right.$$

$$(c') \quad \left\{ \begin{array}{l} U'''_{\sigma_2} = 0 \\ V'''_{\sigma_2} = \frac{m}{2\pi} \vartheta. \end{array} \right.$$

Per avere la forma assunta da σ_2 , dopo la deformazione, gli spostamenti (a') e (b') potranno trascurarsi e basterà tener conto del solo terzo spostamento (c') perfettamente analogo al precedente spostamento (c) .

I due spostamenti (a) e (a') consistono in due traslazioni. La loro differenza sarà

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right)$$

Ponendo $\frac{R_1 - R_2}{R_1} = \gamma$ e sviluppando l'espressione precedente per le potenze ascendenti di γ otterremo

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right),$$

ossia, introducendo il modulo di elasticità E e il coefficiente di Poisson η , (Cfr. Nota precedente, § 6) avremo

$$\delta = \frac{m}{2\pi} \frac{(1-2\eta)}{2(1-\eta)} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right),$$

quindi, se lo spessore dell'anello è piccolo rispetto al suo raggio esterno, questa differenza δ delle due traslazioni sarà trascurabile.

Nella fig. 2, prendendo come origine degli archi dei due cerchi σ_1 e σ_2 il loro incontro coll'asse x dalla parte negativa di esso, abbiamo costruito i contorni delle basi deformate. Le due circonferenze disegnate con linee sottili rappresentano i contorni primitivi delle due basi. Le due linee disegnate più grosse rappresentano i contorni delle basi deformate. I tratti rettilinei sono gli spostamenti subiti dai punti del contorno in virtù degli spostamenti (c) e (c') . Il tratto AB rappresenta l'ampiezza del taglio. La differenza δ è stata trascurata.

6. La formula (6) ci dà il t_{33} che espresso mediante il modulo di elasticità ed il coefficiente di Poisson si scriverà

$$t_{33} = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right).$$

Tenendo quindi conto di questa formula e dei precedenti risultati potremo enunciare il teorema:

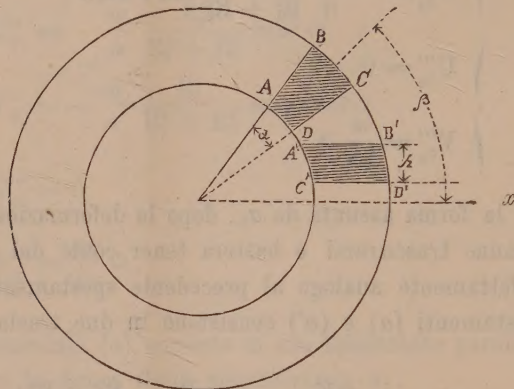


FIG. 5.

Un cilindro cavo di rivoluzione, che ha subito una distorsione (distorsione di ordine 1) dovuta ad una fessura uniforme, conserva le sue basi piane ed alla loro distanza primitiva, mediante delle forze normali agenti sulle basi stesse date da

$$P = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right),$$

intendendo di prendere positivamente le azioni dirette verso l'interno del corpo e negativamente quelle dirette in senso opposto. Contemporaneamente le basi si deformano secondo le leggi stabilite precedentemente (Vedi fig. 2).

La fig. 1 si può dunque interpretare in un nuovo modo. Supponendo che la corona circolare rappresenti una delle basi nella sua forma primitiva, la regione scura rappresenterà quella parte della base che dopo la distorsione dovrà comprimersi dall'esterno e la regione chiara quella che dovrà stirarsi dall'esterno affinché le basi stesse si conservino piane ed alla distanza primitiva.

7. La fig. 3 ci rappresenta il cilindro iniziale prima della distorsione e la fig. 4 lo stesso cilindro dopo la distorsione allorchè le basi sono conservate piane ed alla distanza primitiva. Le basi stesse sono divise in quattro regioni rispettivamente chiare e scure. Le regioni scure sono quelle com-

presse dall'esterno e le regioni *chiare* quelle invece *tese* dall'esterno. Il senso di queste azioni esterne si otterrà invertendo la direzione delle frecce disegnate nella figure stessa.

È facile comporre queste azioni agenti sulle basi. Consideriamo dapprima una striscia radiale ABCD di una delle basi, di apertura angolare α , e la cui linea mediana formi coll'asse x un angolo β (vedi fig. 5).

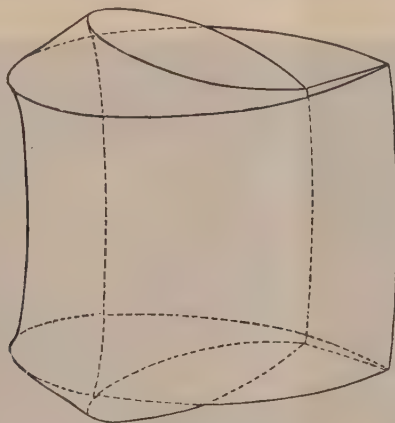


FIG. 6.

Calcoliamo la risultante delle azioni P agenti sulla striscia ABCD. Con un semplice calcolo otterremo

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2 \alpha}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} \cos \beta \cdot \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

ove α denota l'area della striscia.

Se la striscia sarà infinitamente sottile potremo sostituire l'unità al

rapporto $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$ e avremo

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} \alpha \cos \beta,$$

ossia posto

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} = M$$

si avrà

$$M \alpha \cos \beta,$$

cioè l'azione risultante sarà proporzionale all'area della striscia infinitamente sottile e al coseno dell'angolo che essa forma coll'asse x .

Consideriamo ora una striscia $A'B'C'D'$ compresa fra due parallele all'asse x e fra i due cerchi limitanti le basi la cui grossezza sia h . La risultante delle azioni P agenti sopra $A'B'C'D'$ sarà

$$-\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \left(\log \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) h,$$

ossia l'azione risultante sarà proporzionale alla grossezza della striscia.

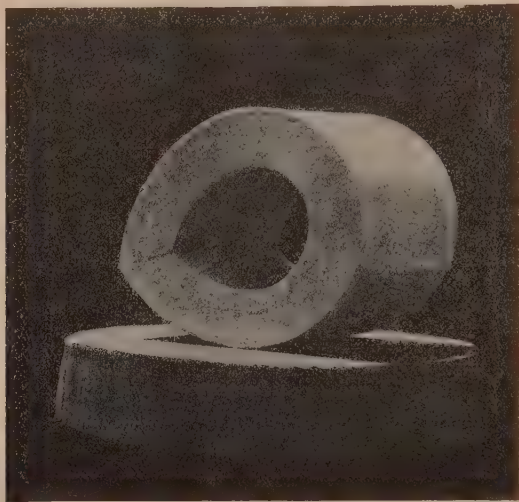


FIG. 7.

Se sviluppiamo l'espressione precedente secondo le potenze ascendenti di γ (cfr. § 5) otterremo

$$-\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right) h.$$

Supponendo l'anello sottile e trascurando le potenze di γ superiori alla prima, tanto questa espressione come quella di M risultano trascurabili e l'espressione di P può scriversi

$$P = \frac{2m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{\xi}{R_1^2 + R_2^2} \cos \vartheta$$

avendo posto il raggio vettore

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}} + \xi$$

e chiamando ϑ l'angolo che il raggio vettore forma coll'asse x .

In questa ipotesi ogni striscia radiale delle basi può riguardarsi approssimativamente come soggetta ad una coppia.

8. Cerchiamo ora la forma che assumerà il cilindro allorchè non si sottopongano più le basi alle azioni P , ma si lascino libere, cioè vediamo la forma che assume il cilindro in virtù della sola distorsione allorchè nessuna forza esterna lo sollecita.

Basterà perciò applicare i principî che abbiamo stabiliti nella Nota II, art. 1°, § 2 (cfr. anche Nota precedente, § 9) e quindi studiare la deformazione di un corpo avente nello stato naturale la forma rappresentata dalla

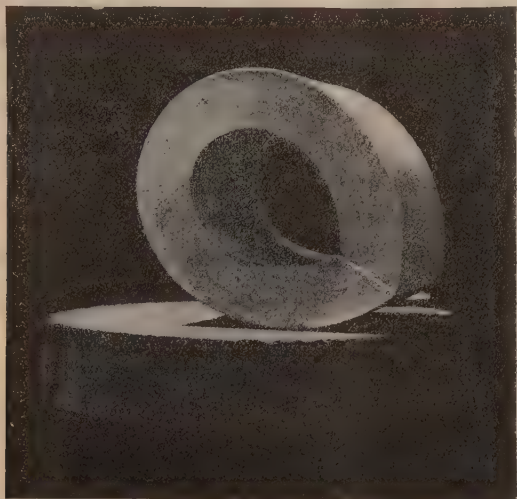


FIG. 8.

fig. 4 e soggetto sopra le due basi alle azioni — P . Bisognerà dunque supporre che il corpo stesso sia teso in ogni elemento delle basi stesse lungo le regioni rappresentate in scuro nella fig. 4 e sia invece compresso nelle regioni chiare, in altri termini che le basi siano soggette alle forze rappresentate dalle frecce nella fig. 4.

Possiamo procedere in modo analogo a quello seguito nella trattazione simile della Nota precedente (cfr. § 9) e supporre cioè diviso il corpo in tante fette radiali. Le coppie agenti sulle basi fletteranno le fette giacenti a sinistra in modo da sollevare l'orlo interno in C ed abbassarlo in D (vedi fig. 4) mentre abbasseranno l'orlo esterno in A e lo solleveranno in B . Nel tempo stesso le generatrici AB si curveranno assumendo una concavità e le generatrici CD diverranno convesse. Il contrario dovrà verificarsi a destra, ma se si tien conto della resistenza che presenta lo spigolo EF la curvatura assunta dalle generatrici EF e GH sarà meno sensibile.

La forma assunta dal corpo sarà perciò quale è rappresentata nella fig. 6 in cui le deformazioni si sono esagerate per renderle facilmente visibili.

Debbo alla gentilezza dell'ing. Jona della casa Pirelli di Milano l'aver potuto istituire un confronto fra i risultati del calcolo e l'esperienza.

Egli mi procurò un grosso cilindro cavo di *caoutchouc* dell'altezza di 7^{cm},7 circa, i cui raggi interno ed esterno erano rispettivamente di 2^{cm},95 e 5^{cm} nel quale tagliò una fetta a faccie parallele della grossezza di 2^{cm},3, saldando poi le faccie della fenditura. Il cilindro venne fortemente legato con spago e quando si scioglieva tendeva ad aprirsi lungo la saldatura dalla parte interna, mentre i due orli esterni della saldatura erano fortemente compressi l'uno contro l'altro. Ciò rivelava giusta la distribuzione delle tensioni lungo il taglio che il calcolo aveva preveduta. Per potere conservarne la forma, giacchè il cilindro lasciato a sè tendeva ad aprirsi, ne fu gettato lo stampo in gesso di cui nelle figg. 7 e 8 riproduciamo le fotografie in due posizioni diverse le quali confrontate colla fig. 6 mostrano la perfetta analogia colla forma indicata dai calcoli.

Debbo esprimere i più vivi ringraziamenti al sig. prof. Eugenio Alessandrini per i disegni contenuti in questa Nota che egli cortesemente mi fece.

Errata corrige alla Nota: *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici*. Seduta del 18 giugno 1905 a pag. 648 la formula (III) deve scriversi togliendo un fattore 2 al denominatore.

Matematica. — *Sulle funzioni intiere trascendenti*. Nota del prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Molte proprietà delle funzioni intiere trascendenti, si possono riguardare, in certa qual guisa, come limiti di note proprietà dei polinomi. A questa idea è appunto informato il presente lavoro. Il metodo seguito mi sembra di qualche interesse, sia per l'indole affatto elementare, sia perchè può essere utilizzato, se non erro, in molte ricerche, non solamente nel campo delle funzioni intiere, ma in quello altresì delle funzioni analitiche più generali. Inoltre mi pare che le considerazioni e i risultati ottenuti, rechino un qualche contributo allo studio delle funzioni intiere, particolarmente per ciò che riguarda il loro comportamento nell'intorno di un punto qualunque.

Sia

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

una trascendente intiera ed J_0 l'insieme formato dalle radici delle equazioni algebriche $f_n(x) = 0$, essendo:

$$f_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Il punto di partenza di questo lavoro è il seguente teorema fondamentale:

* Affinchè un punto α del piano complesso sia uno zero di $f(x)$, è « necessario e basta che esso appartenga al derivato dell'insieme J_0 ».

Fin dal 1889 il sig. Hurwitz ha dimostrato, col sussidio degli integrali curvilinei, una proposizione più generale, che l'A. ha utilizzato nello studio della funzione di Bessel ⁽¹⁾ e che è, senza dubbio, suscettibile di molte altre interessanti applicazioni. Essa è venuta a mia conoscenza solo poco tempo fa; dopo che io avevo dimostrato, per via elementare, il teorema enunciato sopra. Credo tuttavia opportuno, per le ragioni accennate, di esporre qui la mia dimostrazione; tanto più che nel seguito del lavoro, ho bisogno di richiamare qua e là qualche particolare della medesima.

Fra i risultati ottenuti si troverà una nuova dimostrazione, molto semplice, della continuità delle radici di una equazione della forma:

$$f(x) = y,$$

$f(x)$ essendo una trascendente intiera qualunque; e l'estensione alle funzioni trascendenti di una proposizione, che ho dimostrato nella Nota: *Sulla distribuzione delle radici della derivata di una funzione razionale intiera* ⁽²⁾.

§ 1. Alla dimostrazione del teorema fondamentale è opportuno premettere due lemmi.

Sia

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

una successione di funzioni continue della variabile complessa x , uniformemente convergenti in un campo connesso Γ (contorno incluso).

Posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

la funzione $f(x)$, per un noto teorema, è continua nel campo Γ e quindi il suo modulo assume in questo campo un valore massimo L ed un valore minimo l .

In queste ipotesi ci proponiamo di dimostrare il seguente:

Lemma I. « Indicando con ϱ un numero reale maggiore di L , esiste « un numero intiero e positivo m tale che, per $n > m$, risulti:

$$|f_n(x)| < \varrho$$

« in ogni punto x di Γ (contorno incluso) ».

Posto per brevità $f(x) = y$, $f_n(x) = y_n$, in ogni punto x di Γ abbiamo:

$$|y| \leq L < \varrho,$$

⁽¹⁾ A. Hurwitz, *Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function*. Mathematische Annalen, B. 33, pag. 247 e segg.

⁽²⁾ Rend. Accademia dei Lincei, 1904, vol. XIII, 2° sem., fasc. 8°.

la quale ci dice che l'indice della variabile y non esce dal cerchio di raggio L col centro nell'origine, finchè la variabile x rimane nel campo Γ . Sia σ un numero reale e positivo tale che

$$L + \sigma < \varrho;$$

per la supposta convergenza uniforme della successione (1), esisterà un numero intero e positivo m tale che, per $n > m$, e qualunque sia il punto x di Γ , risulti:

$$|y_n - y| < \sigma.$$

Segue da tutto ciò che l'indice di y_n non esce mai dal cerchio col centro nell'origine e di raggio $L + \sigma$, e quindi che

$$|f_n(x)| < \varrho$$

per $n > m$ ed x appartenente a Γ .

In modo analogo si dimostra il

Lemma II. « Supposto $l > 0$ e designando con ϱ un numero reale e « positivo minore di l , esiste un numero intero e positivo m tale che, per « $n > m$, risulti in tutto il campo Γ

$$|f_n(x)| > \varrho.$$

In ciò che segue per *intorno* di un punto a del piano complesso, intenderemo sempre un cerchio col centro in a , che designeremo brevemente con (r) , essendo r il raggio. Indicheremo talora con (r) anche la circonferenza di raggio r e con (r', r) una corona circolare concentrica di raggi r' ed r , ($r' < r$). Inoltre designeremo sempre, come si è fatto sopra, con

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

una trascendente intera e con J_0 l'insieme degli zeri dei polinomi:

$$f_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Teorema fondamentale. « Affinchè il punto a sia uno zero della funzione intera $f(x)$, è necessario e basta che esso sia punto limite dell'insieme J_0 . Verificata questa condizione, in un intorno del punto a per quanto piccolo, vi è almeno uno zero di $f_n(x)$, da un certo valore dell'indice n in avanti ».

Supponiamo dapprima $|f(a)| > 0$. Gli zeri di $f(x)$ formano un insieme isolato⁽¹⁾, per cui in un intorno (r) abbastanza piccolo di a , non vi sono zeri di $f(x)$. Designando con l il minimo modulo di $f(x)$ nell'intorno (r) , dovrà essere $l > 0$. Poichè la successione di polinomi

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

è uniformemente convergente in un campo finito qualunque⁽²⁾, scelto un nu-

(1) V. ad es. G. Vivanti, *Teoria delle funzioni analitiche*. Hoepli, 1901, pag. 117.

(2) Id. id., pag. 68.

mero reale e positivo $\varrho < l$, in virtù del lemma II esiste un numero intero m tale che, per $n > m$,

$$|f_n(x)| > \varrho$$

in ogni punto x di (r) . L'intorno (r) non può quindi contenere zeri di $f_n(x)$, ($n > m$). Segue immediatamente da ciò, che ogni punto limite dell'insieme J_0 è uno zero di $f(x)$.

Supponiamo in secondo luogo $f(a) = 0$. In un intorno abbastanza piccolo di a non vi sono zeri di $f(x)$ all'infuori del punto a . Segue da ciò che il minimo modulo di $f(x)$ nella corona (r_1, r) , ($r_1 < r$), è un numero $l > 0$. Sia ϱ un numero reale e positivo minore di l ; pel lemma II esiste un numero intero e positivo m' tale che, per $n > m'$, risulti

$$(1) \quad |f_n(x)| > \varrho$$

in ogni punto x di (r_1, r) .

Per la continuità di $f(x)$, esiste un intorno (r') del punto a , ($r' < r_1$), in tutti i punti x del quale $|f(x)| < \varrho$; da ciò e dal lemma I risulta che esiste un numero intero m'' , tale che, per $n > m''$,

$$(2) \quad |f_n(x)| < \varrho$$

qualunque sia il punto x di (r') . Sia m_1 il più grande dei numeri m' ed m'' ; per $n > m_1$ saranno verificate ad un tempo le (1) e (2). Indichiamo brevemente con $C_p^{(n)}$ la curva di Cassini definita dall'equazione

$$f_n(x) = y, \quad |y| = \varrho \quad (1).$$

La (1) ci dice che la corona (r_1, r) è *esterna* alla $C_p^{(n)}$ e la (2), che l'intorno (r') è *interno* a questa curva. Esiste in conseguenza una curva chiusa $\gamma_p^{(n)}$, appartenente alla $C_p^{(n)}$, contenuta nell'intorno (r) considerato e che circonda il punto a . Siccome la $\gamma_p^{(n)}$ ($n > m_1$), contiene almeno uno zero di $f_n(x)$, rimane dimostrata anche la seconda parte del teorema enunciato.

Osservazione I. La dimostrazione precedente vale, come è chiaro, per una successione qualunque di polinomi, uniformemente convergente in un campo connesso Γ (contorno incluso) e quindi in, particolare, per una serie di potenze considerata nel suo cerchio di convergenza.

Osservazione II. In virtù delle considerazioni precedenti possiamo asserire che la curva $\gamma_p^{(n)}$ ($n > m_1$), è contenuta nella corona (r', r_1) . Ora è facile riconoscere, che esiste un numero intero e positivo m_2 , tale che, per $n > m_2$, non vi può essere nella corona (r', r_1) un'altra curva chiusa appartenente alla $C_p^{(n)}$; altrimenti in (r', r_1) vi sarebbero infiniti punti dell'insieme J_0 e quindi, pel teorema precedente, uno zero di $f(x)$, contro l'ipotesi fatta relativamente all'intorno (r) . Da tutto ciò si raccoglie:

(1) V. la mia Nota *Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena*. Annali di Matematica, t. VI, ser. III, pag. 234 e segg.

« Se nell'intorno (r) non vi sono zeri di $f(x)$ all'infuori del punto a ,
 « designando con ϱ ed r' due numeri reali e positivi abbastanza piccoli e
 « con m un numero intero e positivo sufficientemente grande, per $n > m$ vi
 « è una ed una sola curva chiusa $\gamma_{\varrho}^{(n)}$ appartenente alla $C_{\varrho}^{(n)}$ e contenuta
 « in (r) . Essa soddisfa inoltre alle seguenti condizioni:

- « 1. È contenuta nella corona (r', r) e circonda il punto a ;
- « 2. Contiene tutti gli zeri di $f_n(x)$ appartenenti ad (r) ».

Notiamo ancora che, per la dimostrazione precedente, lungo la circonferenza (r) si ha $|f(x)| > \varrho$.

Osservazione III. Dal teorema fondamentale scende pure come ovvia conseguenza che:

« Se in un campo connesso Γ (contorno incluso) la funzione intera $f(x)$
 « non si annulla, nel campo stesso non vi sono zeri di $f_n(x)$ da un certo valore
 « dell'indice n in avanti ».

§ 2. Vediamo ora come si comporta l'insieme J_0 nell'intorno di un punto a , il quale sia radice multipla di ordine p dell'equazione $f(x) = 0$. Dimosteremo, a proposito, un teorema, il quale caratterizza le radici multiple e serve di complemento alla proposizione fondamentale.

Sia a una radice dell'equazione $f(x) = 0$ ed (ε) un intorno di a in cui le funzioni $f(x)$ ed $f'(x)$ non si annullano, se si eccettua il punto a per la $f(x)$ ed eventualmente anche per la $f'(x)$. In ciò che segue supporremo che gli intorni di a che dovremo man mano considerare, sieno contenuti in (ε) , anche se non lo si dichiara esplicitamente.

Dimosteremo dapprima il seguente:

Lemma. « Sia (δ) un intorno di a tale che per ogni numero reale e
 « positivo $r \leq \delta$, l'intorno (r) contenga $h + 1$ zeri di $f_n(x)$ da un certo
 « valore dell'indice n in poi: h essendo un numero fisso, anche nullo. In
 « queste ipotesi, assegnato (r) , esiste corrispondentemente un numero intero
 « e positivo m , tale che, per $n > m$, nell'intorno (r) vi sono h zeri di $f'_n(x)$.
 « E reciprocamente ».

In virtù dell'Osservazione II, (§ 1), se ϱ ed r' , ($r' < r$), sono numeri reali e positivi abbastanza piccoli ed m_1 un numero intero abbastanza grande, per $n > m_1$, esiste una ed una sola curva chiusa $\gamma_{\varrho}^{(n)}$ appartenente alla casiniana $C_{\varrho}^{(n)}$, che circonda il punto a e che è contenuta nella corona (r', r) . Oltre a ciò la curva $\gamma_{\varrho}^{(n)}$ contiene tutti gli zeri di $f_n(x)$ appartenenti all'intorno (r) . Se si suppone m_1 sufficientemente grande, per l'ipotesi fatta, la curva $\gamma_{\varrho}^{(n)}$ contiene $h + 1$ zeri di $f_n(x)$ e quindi ne contiene h della $f'_n(x)$ ⁽¹⁾. D'altra parte la funzione $f'(x)$ non si annulla nella corona (r', r) ; segue da ciò e dall'osservazione III, § 1, che esiste un numero intero m_2 , tale che, per $n > m_2$, la corona stessa non contiene zeri di $f'_n(x)$. Designando con m il

(1) C. A. Dell'Agnola, *Sulla distribuzione delle radici*, ecc., loco citato.

più grande dei numeri m_1 ed m_2 , per $n > m$ sono verificate tutte le precedenti condizioni, per cui l'intorno (r) contiene effettivamente h zeri, ed h soltanto, della funzione $f'_n(x)$.

Reciprocamente: supponiamo che nell'intorno (r) di a , (a essendo come prima uno zero di $f(x)$), vi sieno, da un certo valore dell'indice n , h zeri di $f'_n(x)$, con h designando sempre un numero intero fisso, anche nullo; e dimostriamo che ve ne sono $h+1$ di $f_n(x)$, per $n > m$, m essendo un numero intero abbastanza grande. Basta per ciò osservare, come, ripetendo le considerazioni precedenti, esiste un numero intero m , tale che, per $n > m$, gli h zeri di $f'_n(x)$ sono interni alla curva $\gamma_p^{(n)}$ e che questa curva contiene tutti gli zeri di $f_n(x)$ appartenenti all'intorno (r). (Osservazione II, § 1). Possiamo quindi concludere che per $n > m$ l'intorno (r) contiene $h+1$ zeri di $f_n(x)$ (1).

Teorema. « Affinchè il punto a sia radice multipla di ordine p dell'equazione $f(x) = 0$, è necessario e basta che esista un numero reale e positivo δ , tale che, per $r \leq \delta$, nell'intorno (r) vi sieno p zeri (e soltanto p) di $f_n(x)$, da un certo valore dell'indice n in avanti » (2).

Sia a radice multipla di ordine p dell'equazione $f(x) = 0$, di guisa che

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0; |f^{(p)}(a)| > 0.$$

In un intorno (δ) abbastanza piccolo di a , (a escluso), le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(p-1)}(x)$ non si annullano: inoltre $|f^{(p)}(x)| > 0$. Sia r un numero reale e positivo non maggiore di δ ; nell'intorno (r) la funzione $f^{(p)}(x)$ non si annulla, per cui nell'intorno stesso non vi sono zeri di $f_n^{(p)}(x)$, da un certo valore m_p dell'indice n in poi. In virtù del lemma precedente, esiste un numero intero m_{p-1} , tale che, per $n > m_{p-1}$, nell'intorno (r) vi è uno ed un solo zero di $f_n^{(p-1)}(x)$. Il lemma ci dice pure che in (r) vi sono: due zeri di $f_n^{(p-2)}(x)$, ($n > m_{p-2}$); tre zeri di $f_n^{(p-3)}(x)$, ($n < m_{p-3}$); e così via; ed infine p zeri di $f_n(x)$, ($n > m$); gli interi m_{p-2} , m_{p-3} , ..., m , essendo sufficientemente grandi.

Reciprocamente: sia (δ) un intorno di a , tale che, per ogni $r \leq \delta$, nell'intorno (r) vi sieno p zeri di $f_n(x)$, da un certo valore dell'indice n in poi. Il teorema fondamentale ci dice subito che a è radice dell'equazione $f(x) = 0$. D'altra parte, coll'aiuto del lemma dimostrato, si riconosce immediatamente che a è radice multipla di ordine p dell'equazione $f(x) = 0$.

Ciò si dimostra anche per assurdo. Se il punto a fosse radice multipla di ordine q , essendo $q \geq p$, per la prima parte del teorema, in un intorno abbastanza piccolo di a vi sarebbero q zeri di $f_n(x)$, da un certo valore dell'indice n in poi, il che contraddice l'ipotesi fatta.

(1) C. A. Dell'Agnola, *Sulla distribuzione delle radici*, ecc., loco citato.

(2) Cfr. A. Hurwitz, loco citato.

Corollario. « Se sul contorno di un campo connesso Γ non vi sono « zeri della funzione intera $f(x)$, questa, e la $f_n(x)$, da un certo valore dell'indice n in poi, si annullano lo stesso numero di volte nel campo Γ » ⁽¹⁾.

Se nel campo Γ non vi sono zeri di $f(x)$, esso non può contenere zeri di $f_n(x)$, da un certo valore dell'indice n in poi (Oss. III, § 1).

Nel caso opposto, sieno $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, le radici distinte di $f(x)$ contenute in Γ ed s_1, s_2, \dots, s_p gli ordini rispettivi di molteplicità. Posto $s_1 + s_2 + \dots + s_p = q$, ci proponiamo di dimostrare, che nel campo Γ vi sono q radici di $f_n(x)$ da un certo valore dell'indice n in poi. Infatti, asportiamo dal campo Γ i punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, mediante dei piccoli intorni $(r_1), (r_2), \dots, (r_p)$, che supponiamo interni a Γ . Nel campo rimanente, che designeremo con Γ_1 , non vi sono zeri di $f(x)$: esiste quindi un numero intero m' , tale che, per $n > m'$, nel campo stesso non vi sono zeri di $f_n(x)$ (Osservazione III § 1). D'altra parte, se gli intorni $(r_1), (r_2), \dots, (r_p)$ sono scelti sufficientemente piccoli, pel teorema precedente, essi contengono rispettivamente s_1, s_2, \dots, s_p zeri di $f_n(x)$, da un certo valore m'' dell'indice n in poi. Designando con m il più grande dei numeri m' ed m'' , per $n > m$ vi sono evidentemente $s_1 + s_2 + \dots + s_p = q$ zeri di $f_n(x)$ contenuti in Γ .

§ 3. Coll'aiuto delle proposizioni precedenti possiamo dimostrare facilmente la continuità delle radici dell'equazione

$$(1) \quad f(x) = y,$$

$f(x)$ essendo una trascendente intera qualunque.

In altri termini:

« Se per $y = b$ l'equazione (1) ammette p radici eguali ad a , per y « prossimo a b , l'equazione stessa ammette p radici prossime ad a » ⁽²⁾.

Supponiamo per semplicità $b = 0$ ⁽³⁾. Sia (r) un intorno di a nel quale, all'infuori di a , le funzioni $f(x), f'(x), \dots, f^{(p-1)}(x)$ non si annullino e di più nell'intorno stesso si abbia $|f^{(p)}(x)| > 0$. In virtù del teorema del paragrafo precedente esiste un numero intero m , tale che, per $n > m$, nell'intorno (r) vi sono p radici dell'equazione $f_n(x) = 0$. Inoltre, scelti due numeri reali e positivi convenienti r' e ϱ , ($r' < r$), esiste corrispondentemente una curva chiusa $\gamma_\varrho^{(n)}$, ($n > m$), appartenente alla cassiniana $C_\varrho^{(n)}$, contenuta nella corona (r', r) , che circonda il punto a (Oss. II, § 1). Questa curva

⁽¹⁾ Cfr. Hurwitz, loco citato. Cfr. anche É. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*. Paris, Gauthier-Villars, 1900, pag. 43 e segg.

⁽²⁾ Per altre dimostrazioni della continuità di funzioni di tipo più generale si può consultare ad es.: L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, ecc., (litografia). Parte I^a. Pisa, Spoerri editore, pag. 238 e 288. — S. Pincherle, *Lezioni sulla teoria delle funzioni*. Bologna 1893 (lit.). E. Maillet, *Sur les lignes de décroissance maxima des modules*. Journal de l'École polytechnique, II^e série, VIII Cahier, pag. 84.

⁽³⁾ Se fosse $|b| > 0$, basterebbe considerare in luogo di $f(x)$ la funzione $f(x) - b$.

contiene, come sappiamo, tutti gli zeri, in numero di p , della $f_n(x)$ appartenenti all'intorno (r) . Segue da ciò che l'equazione

$$f_n(x) = y', \quad \{ |y'| = \varrho; \quad n > m \}$$

ammette p radici (e p soltanto):

$$x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}$$

appartenenti all'intorno (r) , i cui indici sono situati sulla curva $\gamma_p^{(n)}$. Se poi si ricorda che sulla circonferenza (r) la funzione $f(x)$ non può assumere il valore y' , pel corollario del § precedente, possiamo concludere che la funzione stessa assume nell'intorno (r) p volte il valore y' ⁽¹⁾. Designando con x_1, x_2, \dots, x_p le p radici dell'equazione

$$f(x) = y'$$

appartenenti all'intorno (r) e ricordando che, per l'ipotesi fatta, $|f'(x_i)| > 0$, ($i = 1, 2, \dots, p$), si può anche asserire che ciascuna di esse è semplice. Notiamo infine che l'intorno (r) può scegliersi piccolo a volontà e che, assegnato (r) , le considerazioni precedenti si possono ripetere per ogni y il cui modulo è minore di ϱ . Il teorema della continuità rimane così dimostrato pienamente.

Dalla precedente dimostrazione risulta:

« Se α è radice multipla di ordine p dell'equazione

$$f(x) = 0,$$

« in un intorno di α abbastanza piccolo, la funzione $f(x)$ assume con legge di continuità tutti i valori di un intorno dell'origine pure sufficientemente « piccolo, e ciascuno di essi lo assume p volte » ⁽²⁾.

Notiamo ancora che se m è un numero intiero abbastanza grande, per $n > m$, le p radici dell'equazione

$$f_n(x) = y \quad \{ |y| \leq \varrho \},$$

appartenenti ad (r) formano un unico sistema circolare ⁽³⁾. Segue immediatamente da ciò e dal teorema fondamentale che:

« Le p radici dell'equazione:

$$f(x) = y \quad \{ |y| \leq \varrho \}$$

« dell'intorno (r) , si permutano circolarmente ».

Osservazione. Le proprietà precedenti valgono, come è chiaro, pei punti del piano in cui $f(x)$ assume un valore qualunque b .

(1) Basta applicare il corollario alla funzione $f(x) - y'$, tenendo presente che sulla circonferenza (r) è $|f(x) - y'| > 0$ (Oss. II, § 1).

(2) Cfr. E. Maillet, loc. cit., pag. 80.

(3) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*. II^e édition, Paris, Gauthier-Villars, 1875, pag. 40 e segg.

§ 4. Data una trascendente intiera $f(x)$, continueremo a chiamare *curva di Cassini* corrispondente al numero reale e positivo ϱ , il luogo dei punti del piano complesso in cui $|f(x)| = \varrho$ e la indicheremo brevemente con C_ϱ .

Consideriamo l'insieme delle curve di Cassini $C_\varrho^{(n)}$ definite dalle equazioni algebriche

$$f_n(x) = y, \quad \{|y| = \varrho\}, \quad (n = 1, 2, \dots \infty).$$

Un raggio uscente dall'origine incontra queste curve in un insieme numerabile di punti. Pel teorema fondamentale (§ 1) e per una osservazione fatta alla fine del § precedente, i punti limiti di tale insieme appartengono alla curva C_ϱ . Se si fa ruotare con continuità e in un dato senso il raggio considerato fino a che venga a riprendere la posizione iniziale, i punti limiti suddetti generano la curva C_ϱ . Questa curva si può dunque ritenere, in certa qual guisa, come *limite* delle curve algebriche $C_\varrho^{(n)}$. Essa divide il piano in due regioni: l'una, che chiameremo *interna*, in cui $|f(x)| < \varrho$; l'altra *esterna*, nella quale $|f(x)| > \varrho$.

Sia γ_ϱ una curva *chiusa* appartenente alla C_ϱ e si supponga che essa non abbia punti comuni con altre curve della C_ϱ , o, ciò che torna lo stesso (§ 3), che su questa curva non vi sieno radici della $f'(x)$. In questa ipotesi ci proponiamo di dimostrare il teorema seguente:

« Il numero degli zeri di $f'(x)$ contenuti nella curva γ_ϱ , è uguale a quello degli zeri di $f(x)$, contenuti nella medesima curva, diminuito di una unità » ⁽¹⁾.

Sia x' un punto di γ_ϱ e col centro in x' descrivasi un piccolo cerchio di raggio r , che indicheremo con (x', r) . Supponiamo che x' percorra la curva γ_ϱ ; il cerchio (x', r) descriverà un'area Γ , la quale, se r è scelto abbastanza piccolo, sarà limitata da due curve chiuse simili alla γ_ϱ ; l'una interna e l'altra esterna a questa curva e che designeremo brevemente con γ_i e con γ_e . Poichè sulla γ_ϱ le funzioni $f(x)$ ed $f'(x)$ non si annullano, esiste, in virtù di una nota proprietà delle funzioni analitiche, un numero reale e positivo δ , tale che, per $r < \delta$, l'area Γ (contorno incluso) non contiene zeri di $f(x)$ e di $f'(x)$; cosicchè gli zeri di queste funzioni contenuti in γ_ϱ , sono tutti interni alla curva γ_i . Ciò si verifica altresì per le funzioni $f_n(x)$ ed $f'_n(x)$ da un certo valore m_1 dell'indice n in poi (Oss. III^a, § 1). In ogni punto x di γ_i si ha $|f(x)| < \varrho$; per cui (lemma I, § 1) esiste un numero intero m' , tale che, per $n > m'$, risulti:

$$(1) \quad |f_n(x)| < \varrho.$$

Se poi il numero r è scelto piccolo abbastanza, nei punti di γ_e si avrà $|f(x)| > \varrho$; da ciò e dal lemma II (§ 1), si avrà pure:

$$(2) \quad |f_n(x)| > \varrho$$

⁽¹⁾ Cfr. C. A. Dell'Agnola, *Sulla distribuzione delle radici*, ecc., loc. cit.

da un certo valore m'' dell'indice n in avanti. Sia m_2 il più grande dei numeri m' ed m'' ; per $n > m_2$ le (1) e (2) saranno verificate rispettivamente nei punti di γ_i e di γ_e . Ripetendo il ragionamento fatto alla fine del § 1 (Oss. II), si riconosce che esiste una ed una sola curva chiusa $\gamma_\rho^{(n)}$, ($n > m_2$), appartenente alla $C_\rho^{(n)}$, contenuta in Γ e che contiene, alla sua volta, la curva γ_i . Ciò premesso, si supponga che nella curva γ_ρ vi sieno q zeri di $f(x)$. Pel corollario del § 2, essa contiene q zeri di $f_n(x)$, da un certo valore m_3 dell'indice n in poi. Indicando con m il più grande dei numeri m_1, m_2, m_3 , per $n > m$ sono verificate tutte le condizioni precedenti; e quindi la curva $\gamma_\rho^{(n)}$ contiene tutti gli zeri di $f_n(x)$, in numero di q , che sono interni alla γ_ρ e questi soltanto. Essa contiene in conseguenza $q - 1$ zeri della $f'_n(x)$ ⁽¹⁾, i quali, per le considerazioni precedenti, sono alla loro volta contenuti in γ_ρ . Tenendo presente che per l'ipotesi fatta lungo questa curva la $f'(x)$ non si annulla, si può concludere (§ 2) che essa contiene $q - 1$ zeri, e soltanto $q - 1$, di $f'(x)$, ciò che dimostra l'asserto.

Zoologia. — *Della degenerazione senile nei Protozoi* ⁽²⁾. Nota di PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio C. EMERY.

Faccio seguito, colla presente Nota, ad una comunicazione che feci due anni fa al Congresso zoologico di Rimini ⁽³⁾. Mostrai allora come Infusorî allevati in piccole culture siano sensibili più che ad altre condizioni, alle influenze batteriche; e come queste determinino in loro fenomeni degenerativi; gli AA. che, come il Maupas ⁽⁴⁾, hanno constatato simili fenomeni nelle culture di Infusorî ai quali sia impedita la coniugazione, hanno essi evitato le intossicazioni batteriche, in tal maniera da poter affermare che le degenerazioni osservate siano da attribuirsi non a queste, ma a proprietà insite negli organismi stessi della esperienza? Ciò non essendo stato fatto, si possono attribuire ai batteri le influenze nocive, e sospettare inesistente la degenerazione detta senile.

A questo punto arrivai colle ricerche, i cui risultati vennero esposti nella comunicazione succitata. Avendo continuato a farne numerose e prolungate molto, ne riferisco qui brevemente i risultati principali, che completano quelli precedenti; ho voluto avere di fronte alla impossibilità di mantenere senza degenerazioni in vita Infusorî sotto l'influenza di troppi batteri, la prova po-

⁽¹⁾ C. A. Dell'Agnola, loc. cit.

⁽²⁾ Le ricerche di cui si tratta in questa Nota e nella seguente di ugual titolo, sono state compiute nell'Istituto zoologico dell'Università di Bologna.

⁽³⁾ *Monitore zool. Ital.*, v. 14, pagg. 349-351, 1903.

⁽⁴⁾ *Recherches expérimentales sur la multiplication des Infusoires ciliés*. Arch. zool. expér. (2) T. 6, pagg. 165-277, 1888.

sitiva della mia affermazione; ossia, dimostrare la possibilità di evitare la degenerazione, evitando l'eccessivo sviluppo di batteri.

Metodi di ricerca. I metodi, semplicissimi, facilissimi ad essere seguiti per una settimana, offrono grandi difficoltà per la durata delle esperienze che deve essere molto lunga. Bisogna avere la pazienza di non derogare mai da certe regole, neppure per un giorno; ciò che, di fronte alla monotonia delle operazioni manuali da fare tutti i giorni, costituisce una lotta incessante colla irrequietezza sempre crescente del proprio spirito. Non bisogna trascurare questo elemento psicologico nelle ricerche di cui si tratta, perchè ho acquistato la convinzione che nella degenerazione senile degli Infusori, di *vecchio* non c'è altro che la pazienza dello sperimentatore.

Come altri hanno fatto, ho seguito le generazioni di Infusori, partendo da un solo individuo di ciascuna specie. Questo, isolato in una piccola cultura, si trova, il giorno seguente, sostituito da due o più discendenti; di questi se ne isola uno, o diversi in culture separate; e così ogni giorno o più volte al giorno nella stagione calda, tenendo nota del numero di generazioni che si seguono per divisione. Innanzi tutto dò le regole a cui mi sono attenuto scrupolosamente nel fare queste culture.

Le specie che ho coltivato, *Glaucoma scintillans*, *Stylonicchia pustulata*, *Vorticella nebulifera*, si prestano bene ad essere alimentate con infusi di fieno, contenenti batteri e flagellati. Faccio sempre gli infusi rapidamente, mettendo a bollire per pochi minuti una piccola quantità di fieno in acqua potabile; dopo la bollitura, il liquido ancor caldo lo verso in una vaschetta di vetro a coperchio, prima sterilizzata, perchè non contenga Infusori. Ho due o tre di queste vaschette sempre in funzione; quando un infuso lo giudico vecchio e cattivo, vuoto la vaschetta, che non ha bisogno di essere sterilizzata, perchè non contiene Infusori; e vi verso un infuso nuovo. Così batteri e flagellati si sviluppano rapidamente in questo nuovo infuso, non essendo stati tutti distrutti, quelli che erano aderenti alle pareti della vaschetta. Non mi è mai accaduto di trovare in questi infusi degli Infusori, se non ce li avevo messi consapevolmente. Il fieno adoperato, non troppo giallo, dà infusi di un colore intermedio tra il verdolino e l'arancione; col tempo il colore si intensifica, passando al rossiccio. Mutato il colore, va mutato l'infuso.

I Protozoi sperimentati vivono in gocce scoperte, appoggiate su vetrini. Per comodità ho preparato dei piccoli vetrini coprioggetti, o dei pezzetti di lastra di vetro un po' più grossa, ma tagliata in piccole dimensioni (quadrati o rettangoli aventi da 1 a tre cm. di lato), ai quali ho saldato tutto attorno un pezzo di fine bacchetta di vetro, piegata ad avere la forma del contorno del vetrino, e saldata a fuoco in un vertice. La bacchetta è unita al vetro mediante ceralacca; in questi piccoli recipienti una goccia di liquido rimane abbastanza difesa dai possibili incidenti, e si può anche osservare a forte ingrandimento, capovolgendo il ve-

trino, quando esso è sottile. È importante però che la ceralacca non sia lasciata a fare da limite esterno alla goccia; altrimenti l'acqua facilmente sale su di essa, magari abbandonando la parte di mezzo del vetrino. Per evitare questo, basta porre dei piccolissimi pezzetti di paraffina sopra alla ceralacca della saldatura e farli fondere con un ferretto scaldato; la goccia deve rimanere, si capisce, sul vetro pulito, ma se anche viene in contatto colla paraffina, non vi sale sopra.

Partendo p. es. da un Glaucoma, che vive in una di queste gocce, quando esso si è diviso, distribuisco i due discendenti su due vetrini consimili, per mezzo di una pipetta, come si usa fare, seguendo il Maupas. Cerco di trasportare pochissimo liquido della goccia originaria; aggiungo parecchia acqua potabile (è un pregiudizio che sia necessario usare acqua piovana) ed una piccola quantità dell'infuso alimentare, ricco di batteri e flagellati. In questo modo si evita l'azione dei prodotti di eliminazione degli Infusori in esperienza, giacchè quella piccola quantità che si trasporta coll'individuo che viene isolato, si diluisce in una quantità di liquido molto maggiore; si evita l'azione delle tossine batteriche in eccessiva quantità, perchè dell'infuso alimentare si prende una quantità molto piccola, che viene diluita in molt'acqua; si dà invece da mangiare abbondantemente agli Infusori, giacchè la gocciolina di infuso è ricca di batteri e flagellati; nè vi è il tempo che questi infettino l'ambiente in maniera perniciosa, giacchè ogni giorno ed anche più spesso tutto viene rinnovato. In fondo, questa maniera di formare le gocce riesce vantaggiosa per un fatto che l'esperienza ha dimostrato vero: porre un Infusorio in una goccia di un infuso grande 1 mm. c. e contenente 10,000 batteri, non è lo stesso che porlo in una goccia di 0,1 mm. c. contenente ugualmente 10,000 batteri, e diluito al momento con acqua pura fino ad 1 mm. c. Nel primo caso i pericoli di morte per l'Infusorio sono enormemente maggiori. È inutile che io stia a discutere ampiamente quali possono essere le ragioni di questa differenza, delle quali molte se ne intravedono facilmente; qui si tratta soltanto di trovare un metodo che *in pratica* assicuri maggiori probabilità di vita agli Infusori; e quello sopra indicato corrisponde bene.

Ho sempre rifuggito da culture fatte in vetro portaoggetti coperto da coprioggetto, sia pure con qualche cosa interposta per conservare i due vetri ad una certa distanza. Questo metodo, che ho provato ripetutamente nelle prime esperienze fatte, ha una quantità di inconvenienti; non si riesce mai a ricambiare tra i due vetrini il liquido in tal maniera che siano portati via i batteri e flagellati che si attaccano sempre più numerosi alle superfici del vetro; questo se si deve conservare gli Infusori a lungo nello stesso vetrino; se si deve cambiare ogni giorno è una seccatura enorme, per riuscire a prendere colla pipetta i pochi individui viventi nella

cultura, e per pulire i vecchi preparati, o farne continuamente dei nuovi. Di fronte a questi inconvenienti non vi è altro che un vantaggio apparente: la maggior facilità di trasporto delle culture. Ma anche questo è apparente; io ho viaggiato spesso colle mie culture, senza perdere gli Infusorî; avevo soltanto la cura di mettere le gocce un poco più piccole del consueto, perchè meno facilmente si rovesciassero; anzi, se le gocce sono piccole, ed il vetrino è leggermente unto con paraffina (non troppo!) si possono rovesciare e scuotere i preparati senza nessun pericolo: li ho perfino spediti per ferrovia, e trovati all'arrivo nelle medesime condizioni di quelli che avevo portato con me, per precauzione.

Naturalmente tutte queste culture sono state sempre tenute entro camere umide.

Allevamento del Glaucoma scintillans. Questa specie, che ha il pregio non piccolo di riprodursi per divisione rapidamente, molte volte al giorno durante la stagione calda, la ho allevata a partire dal 28 settembre 1904, cominciando però con un sistema che poi ho del tutto abbandonato; un solo individuo, isolato in quel giorno, fu posto in una cultura a sifone, quale già avevo usato e descritto brevemente nella mia Nota precedente. In questa cultura, nella quale scorreva acqua depurata da Infusorî per filtrazione, accadde varie vicende, poco degne di nota, tra le quali anche coniugazioni tra i numerosi individui che la componevano. Finalmente il 28 di ottobre presi da questa cultura un solo Glaucoma, che trasportai in un vetrino per farne l'allevamento in gocce scoperte, secondo la tecnica descritta or ora. Rimandando alla tabella qui unita per quel che si riferisce alla rapidità della divisione nei vari mesi dell'anno, riferisco le osservazioni più notevoli che sono state fatte durante l'allevamento. Esse si riferiscono essenzialmente all'influenza degli infusi più o meno invecchiati. Mentre conservavo ogni giorno alcuni individui in infusi fatti da pochi giorni, su altri individui feci a più riprese la prova di lasciare invecchiare un poco più l'infuso. Feci queste prove quando mi sembrava che la attività riproduttiva tendesse a diminuire, senza però aspettare ad esserne tanto sicuro da non poter avere dei dubbi; non volevo condurre neppure una volta le mie culture a mal partito. In queste circostanze dunque, ogni giorno sceglievo tra i vari individui nati nelle culture alimentate con infuso nuovo, alcuni per metterli in vetrini con questo stesso infuso; altri li mettevo in altri vetrini coll'infuso più vecchio. Senza eccezione alcuna osservai che l'infuso vecchio diminuiva l'attività riproduttiva dei Glaucomi; ne trovavo, il giorno seguente, un minor numero di individui che nelle culture con infuso nuovo; naturalmente mi sforzavo di rendere uguali tutte le altre condizioni, quantità d'acqua ecc. Questa differenza si accentuava sempre più, quanto più l'infuso invecchiava, ma qualche volta molto rapidamente, in pochissimi giorni; nè era la variazione di liquido che faceva male ai miei individui, perchè se mi servivo, per una prova su in-

dividui in più destinati ad essere sacrificati, sempre dello stesso infuso che andava invecchiando, il male era anche peggiore; mentre il trasporto in un infuso nuovo poteva salvare anche degli individui mal ridotti, smagriti, con attività riproduttiva molto diminuita.

Per abitudine, io rinnovavo gli infusi prima di notare fenomeni degenerativi nelle culture; credo di averne raramente conservato uno per più di una settimana. Nella stagione calda mi servo di un infuso anche appena fatto e raffreddato, senza lasciare che si sviluppino in esso i germi che vi sono; ve ne sono sempre in abbondanza colla piccola quantità di liquido che viene trasportata insieme all'individuo che viene isolato, e la loro attività riproduttiva è sufficientemente grande per impedire che l'avidità del Glaucoma li esaurisca; d'inverno feci qualche prova di questo genere, ma ho riscontrato che è più vantaggioso avere l'infuso pronto da due o tre giorni. Non bisogna però mai temere che l'alimento sia troppo poco, quando sostanze nutrienti disciolte nel liquido vi sono in quantità sufficiente; sempre invece che sia troppo.

Ed ecco la tabella riassuntiva:

Da un Glaucoma scintillans isolato il 15 novembre 1904, si arriva il

1° dicembre alla generazione 26					
16	"	59	Nel dicembre, 57 generaz.		
1° gennaio 1905	"	83			
16	"	114	gennaio	39	"
1° febbraio	"	142			
16	"	178	febbraio	68	"
1° marzo	"	210			
16	"	245	marzo	79	"
1° aprile	"	289			
16	"	329	aprile	110	"
1° maggio	"	399			
16	"	464	maggio	109	"
1° giugno	"	538			
16	"	604	giugno	136	"
1° luglio	"	678			
3 luglio	"	683			

Quali prove che è sempre mancata la copulazione? Quando avvengono 6 o 7 generazioni per giorno, anche guardando le culture due volte al giorno, si trovano parecchi individui che potrebbero essersi coniugati, per esempio, durante la notte. Ma vi sono argomenti assolutamente sicuri per affermare che ciò non è mai avvenuto; e questi argomenti hanno tanto più valore, in quanto non sono tratti dalle mie sole osservazioni, ma anche da quelle di

altri autori, compreso e primo il Maupas, a cui si devono tanti risultati importanti sulla biologia dei Protozoi, pur non essendo giusta la conclusione della degenerazione senile. Quando gli Infusori sono alimentati regolarmente e tenuti in buone condizioni, non si coniugano mai, e tanto meno tra discendenti prossimi di uno stesso individuo. Questa legge è stata tante mai volte verificata, senza che alcuna eccezione si sia osservata, che non vi è qui nulla da aggiungere. Soltanto voglio accennare che essa vale anche per quelle specie in cui la copulazione è fenomeno frequentissimo, come per il *Chilodon uncinatus*, sul quale ho fatto apposite esperienze.

Di fronte ad un numero così elevato di generazioni, in cui non si è osservato fenomeni degenerativi, che invece comparivano subito, appena si cambiavano un poco le condizioni di allevamento, in qualche prova di confronto, sia diminuendo gli alimenti, sia rinnovando meno spesso il liquido alimentare, o dando troppo infuso e poca acqua, vale a dire tutte le volte che si diminuivano gli scrupoli, non vi è che una conclusione possibile: che la degenerazione senile non esiste. Vero è che non ho fatto queste ricerche per un tempo infinito; nè evidentemente è troppo facile farle! Ma la degenerazione senile osservata dal Maupas si è verificata in tempi anche più corti di quelli che son durati i miei allevamenti. E le degenerazioni che ha osservato Calkins⁽¹⁾ nelle culture di *Paramoecium*, e che egli è riuscito a guarire per mezzo di azioni stimolanti speciali, chimiche soprattutto, si sono verificate entro pochi mesi. L'A. crede con gli stimoli che ha fatto agire sui suoi Protozoi di avere prodotto un fenomeno paragonabile alla partenogenesi artificiale degli Echinodermi ecc. Io dico invece che egli ha tolto o diminuito le influenze nocive (batteriche) che tendevano ad uccidere i suoi organismi. Non si vorrà, spero, credere che anche nelle mie culture siano avvenuti fenomeni di partenogenesi artificiale, perchè d'inverno faceva più freddo che d'estate, o perchè gli infusi alimentari non saranno stati sempre perfettamente uguali tra loro. Chè altrimenti si dovrebbe concludere che anche tutta la nostra vita è una serie di partenogenesi artificiali, dovuta al fatto che ogni giorno vi sono su di noi degli stimoli che agiscono, per es., perchè mangiamo e perchè non viviamo in un termostato di D'Arsonval; e come prova questa che se, per togliere gli stimoli esterni o almeno diminuirli, si resta senza mangiare, dopo pochi giorni si muore.

Infine voglio notare che le osservazioni del Maupas che portavano a concludere per l'esistenza di una degenerazione senile, non sono fatte tenendo d'occhio continuamente i Protozoi delle culture, giorno e notte; ciò non è

(1) Calkins, *Studien on the Life-History of Paramoecium caudatum*. Arch. entwick. Mechan. 15 B. S. 139-184, 1902; Kulagin, *Zur Biologie der Infusorien*, Physiologische Russe, vol. 1, pagg. 269-275, 1900; Joukowsky, *Beiträge zur Frage nach der Bedingungen der Vermehrung und des Eintrittes der Conjugation bei den Ciliaten*. Verh. Nat. Med. Ver. Heidelberg (2) 6 B. S. 17-42, 1898.

praticamente possibile; anzi, la possibilità di coniugazioni era nel suo caso assai maggiore che nel mio, giacchè l'A. conservava gli Infusori in uno stesso vetrino fino a che erano giunti ad un numero di individui considerevole (parecchie centinaia), e quindi erano tra loro molto più fitti e meno stretti da legami di parentela. Una opinione sorta in base ad osservazioni fatte in tali condizioni, è evidentemente distrutta da osservazioni opposte fatte in condizioni che pongono molto più al riparo dalla possibilità di coniugazioni.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero prof. TOBIA ROBERTO THALÉN, mancato ai vivi il 27 luglio 1905; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 21 luglio 1902.

V. C.
